UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
MATEMÁTICAS I (MA-1111)

Elaborado por
Samuel Alonso
14-10028
Ing. Telecom

6 de marzo de 2017

Límites, Límites Trigonométricos, Continuidad, Derivabilidad, Derivada, Recta Tangente

Resolución Segundo Parcial 2012 Septiembre-Diciembre Tipo E

1. Resuelva los siguientes límites:

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\qquad b)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{2x^3+x-1}-\sqrt{x^2-3x}}{3x+2}$$

$$c)\ \lim_{x\to -1}\frac{3x^2+x-2}{(x+1)^2}\qquad d)\ \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-2}-x\right)$$

a) Primero, expresemos el numerador y el denominador en términos de senos y cosenos.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}.$$

Ahora, multiplicar apropiadamente por $1+\cos x$ nos permite obtener un factor $\sin^3 x$ en el numerador para aprovechar el uso del límite notable de $\sin x/x$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos^2 x)}{x^3\cos x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{x^3\cos x(1+\cos x)}.$$

Finalmente, separando el producto podemos evaluar directamente el límite.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{x^3\cos x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{x^3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x(1+\cos x)}=\frac{1}{2}.$$

b) Antes de evaluar el límite, consideremos el cambio de variables $u=-x$. Bajo el cambio de variables, la expresión original resulta

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\sqrt[3]{-2u^3-u-1}-\sqrt{u^2+3u}}{-3u+2}.$$

Tomando factor común u de forma apropiada en cada término de la fracción, puede reescribirse la expresión de forma sencilla de evaluar.

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\sqrt[3]{-2u^3-u-1}-\sqrt{u^2+3u}}{-3u+2} = \lim_{u\to\infty} \frac{u\sqrt[3]{-2-u^{-2}-u^{-3}}-u\sqrt{1+3u^{-1}}}{u(-3+2u^{-1})}.$$

Finalmente, cancelando los términos comunes u, puede evaluarse el límite directamente.

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\sqrt[3]{-2-u^{-2}-u^{-3}}-\sqrt{1+3u^{-1}}}{-3+2u^{-1}} = \frac{1+\sqrt[3]{2}}{3}$$

c) Véase que como -1 es una raíz del numerador, entonces este polinomio tiene asociado un factor $x+1$. Luego de observar esto, su factorización se obtiene rápidamente como $3(x+1)(x-2/3)$. Sustituyendo en la expresión y operando,

$$\lim_{x\to-1} \frac{3x^2+x-2}{(x+1)^2} = \lim_{x\to-1} \frac{3(x+1)\left(x-\frac{2}{3}\right)}{(x+1)^2} = \lim_{x\to-1} \frac{3x-2}{x+1}.$$

Es importante notar que la expresión ya no genera una indeterminación de la forma $0/0$. Sin embargo, como

$$\frac{1}{x+1} \to \infty,\ x\to -1^+ \quad \text{y} \quad \frac{1}{x+1} \to -\infty,\ x\to -1^-,$$

entonces la función no se acerca a un punto límite, puesto que sus límites laterales alrededor de -1 no coinciden. Por ende, el límite **no existe**.

d) Racionalizando de forma apropiada para eliminar la raíz, se obtiene que

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-2}-x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x-2}{\sqrt{x^2+3x-2}+x}.$$

Luego, extrayendo un factor x^2 de la raíz y luego tomando factor común x, podemos reescribir como

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x(3-2x^{-1})}{x\sqrt{1+3x^{-1}-2x^{-2}}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3-2x^{-1}}{\sqrt{1+3x^{-1}-2x^{-2}}+1},$$

lo cual nos permite evaluar el límite directamente.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3-2x^{-1}}{\sqrt{1+3x^{-1}-2x^{-2}}+1} = \frac{3}{2}$$

2. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax, & x \leq 2 \\ ax - b, & x > 2 \end{cases}$$

halle los valores de a y b tales que f sea derivable en $\mathbb{R}$.

Para garantizar que la función sea derivable debe asegurarse que la función sea además continua. En ese sentido, a y b deben ser escogidas tales que

$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) \quad \text{y} \quad \exists \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}.$$

donde la existencia de ambos límites implican la igualdad de los límites laterales respectivos. Para garantizar la continuidad de f en 2, basta con tomar entonces

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x).$$

Es decir, que

$$4 - 2a = 2a - b.$$

De igual manera, para garantizar que f sea derivable, debe cumplirse que

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}.$$

Es decir, que

$$4 - a = a.$$

De la ecuación anterior, se tiene que $a = 2$, y luego

$$4 - 2a = 2a - b \implies b = 4.$$

Finalmente, $a = 2$ y $b = 4$ garantizan que f sea derivable en 2, y por tanto derivable en $\mathbb{R}$, puesto que cada rama de la función es, por si misma, derivable en $\mathbb{R}$.

3. Halle las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $(5, 9)$ y son tangentes al gráfico de la función $y = x^2$.

Primero, consideremos una recta arbitraria $y = mx + b$. Es importante entender primero lo que se desea hallar; intuitivamente, si se imaginan dos rectas tangentes a la gráfica de x^2, es claro que estas se intersectan en un punto. El problema en cuestión es al revés: se tiene el punto, y se desea hallar ambas rectas. El problema impone tres condiciones sobre la recta. La primera, que ésta pase por el punto $(5, 9)$. Es decir, que $(5, 9)$ satisfaga la ecuación de la recta,

$$5m + b = 9.$$

La segunda condición es que la recta debe ser tangente a algún punto de la gráfica de $y = x^2$. Es decir, que para algún x_0, el punto (x_0, x_0^2) debe satisfacer la ecuación de nuestra recta.

$$mx_0 + b = x_0^2.$$

La última condición es que, por ser tangente a la gráfica de $y = x^2$, la pendiente de la recta en el punto x_0 debe coincidir con la derivada de $y = x^2$ en ese mismo punto. Es decir,

$$m = 2x_0.$$

Aplicando esta ultima condición a las ecuaciones anteriores, vemos que

$$b = 9 - 10x_0 \quad \text{y} \quad 2x_0^2 + b = x_0^2.$$

Sustituyendo b en la segunda ecuación y operando se obtiene que

$$x_0^2 - 10x_0 + 9 = 0,$$

que puede factorizarse como

$$(x_0 - 1)(x_0 - 9) = 0.$$

De aquí, se obtienen los puntos para los cuales las tres condiciones se cumplen.

$$x_0 = 1 \qquad x_0 = 9$$

y como disponemos de expresiones para b y m en términos de x_0, no es necesario recurrir a la fórmula punto-pendiente. Los valores correspondientes para b y m se obtienen de un simple cálculo.

$$\begin{aligned} b_1 &= -1 \qquad & b_2 &= -81 \\ m_1 &= 2 \qquad & m_2 &= 18 \end{aligned}$$

Finalmente, las rectas resultan

$$l_1 : y = 2x - 1 \qquad \text{y} \qquad l_2 : y = 18x - 81.$$

4. Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

$$a)\ h(x) = \frac{x \sin 2x}{1 + x^2} \qquad b)\ g(x) = \cos^2\left(\sqrt{x} + 2x^4\right)$$

a) Esta derivada puede ser calculada fácilmente, mediante la fórmula para la derivada de un cociente, si se halla primero la derivada del producto $x \sin 2x$. Derivando,

$$\frac{d}{dx}(x \sin 2x) = \sin 2x + 2x \cos 2x,$$

y luego,

$$\frac{d}{dx}h(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x \sin 2x}{1+x^2}\right) = \frac{(\sin 2x + 2x\cos 2x)(1+x^2) - 2x^2 \sin 2x}{(1+x^2)^2}.$$

b) Para evitar confusiones al aplicar la regla de la cadena, un buen método para derivar sistemáticamente a través de composiciones de funciones es utilizar cambios de variable sucesivos. Es decir, sean

$$u = \sqrt{x} + 2x^4,\ w = \cos u,\ z = w^2 = g(x).$$

Entonces,

$$\frac{d}{dx}g(x) = \frac{dz}{dw}\cdot\frac{dw}{du}\cdot\frac{du}{dx} = 2w \cdot - \sin u \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 8x^3\right).$$

Reemplazando de vuelta los valores sustituídos,

$$\frac{d}{dx}g(x) = -2\cos\left(\sqrt{x} + 2x^4\right)\sin\left(\sqrt{x} + 2x^4\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 8x^3\right).$$

Nota: Este material fue elaborado por Samuel Alonso con ejercicios obtenidos del segundo parcial de Septiembre-Diciembre del 2012 (tipo E), y fue realizado para el uso de toda la comunidad académica.

Samuel Alonso
Carnet: 14-10028
Ingeniería en Telecomunicaciones
Twitter: @zickpic

Se agradece notificar cualquier error de tipeo o en las respuestas y qué debería decir a la dirección gecousb@gmail.com